J. 1732

SESSION DE 1998

Filière MP

EPREUVE DE MATHEMATIQUES I

Durée : 3 heures

L'utilisation de toute calculatrice est interdite

Les deux parties sont totalement indépendantes .

Première partie

On considère dans toute cette partie un nombre entier p tel que $p^{1/3} = u$ ne soit pas rationnel ; on note $j = \exp(2i\pi/3)$, et l'on note : $\alpha = a+bu+cu^2$, $\beta = a+bju+cj^2u^2$ et $\gamma = a+bj^2u+cju^2$, avec a, b, c dans $\mathbb{Q}$.

1.Déterminer P dans $\mathbf{Q}[X]$, de degré 3, tel que $P(\alpha) = P(\beta) = P(\gamma) = 0$.

2.On veut montrer que : " $\alpha\beta\gamma = 0$ " implique "(a,b,c) = (0,0,0) " ;on suppose l'existence de $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, tel que $\alpha.\beta.\gamma = 0$;

a. Montrer que les polynômes cX^2+bX+a et $X^3 - p$ ont une racine commune ;

b. Montrer que la quantité $(ac-b^2)$ ne peut être nulle ;

c. Vérifier que la racine commune est dans $\mathbf{Q}$, et conclure .

3.On fixe (a,b,c) dans $\mathbf{Q}^3$ et on lui associe la matrice $M(a,b,c) = \begin{bmatrix} a & pc & pb \\ b & a & pc \\ c & b & a \end{bmatrix}$

a. Pour x, y, z rationnels, on pose $V = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ et $V' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = M(a,b,c) \cdot V$;quelle relation existe-t-il entre $x+yu+zu^2$, $x'+y'u+z'u^2$ et $a+bu+cu^2$?

b. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de M(a,b,c) ;cette matrice est-elle diagonalisable sur $\mathbf{C}$? (On étudiera d'abord M(0,1,0) = U et l'on exprimera M(a,b,c) en fonction de U)

c. Calculer le déterminant de M(a,b,c) ;montrer qu'il est nul si et seulement si : a=b=c=0 .

d. Pour n entier naturel, montrer l'existence de $(a_n,b_n,c_n) \in \mathbf{Q}^3$ tels que : $(M(a,b,c))^n = M(a_n,b_n,c_n)$ et expliciter $(a+bu+cu^2)^n$ en fonction de a_n, b_n, c_n et u .

Deuxième partie.

1.Soit P un polynôme à coefficients dans C , de degré n ($n > 1$), et tel que :

$\forall z \in C$, $(P(z) = 0) \Rightarrow (P(-z) \neq 0)$

a. Montrer l'existence de deux polynômes R et S tels que :$P(X) = R(X^2) + X.S(X^2)$, avec R et S premiers entre eux .

b. Soient Q_1 et $Q_2 \in C[X]$ tels que $R.Q_1 + S.Q_2 = -1$, et $Q(X) = Q_2(X^2) + X.Q_1(X^2)$;montrer l'existence de $G \in C[X]$ tel que : $P(X).Q(X) + X = G(X^2)$.

c. Si $P(X) = X^3+X-1$, déterminer un polynôme H de degré au plus 3 tel que P(X) divise $H(X^2)-X$.

2. On considère deux matrices A et B dans $M_n(C)$, et l'on suppose que les valeurs propres de A et celles de B ont une partie réelle > 0 ;

a. Montrer l'existence de P et Q dans C[X] tels que :

(1) $P(A) = Q(B) = 0$ et

(2) $\forall z \in C$, $(P(z)=0$ ou $Q(z)=0) \Rightarrow (Re(z) > 0)$

b. Vérifier l'existence de $G \in C[X]$ tel que P(X).Q(X) divise $G(X^2)-X$.

c. On suppose en outre que $A^2 = B^2$;montrer que : A = B .

3.Soit E un espace euclidien, et u un endomorphisme symétrique positif de E .

a. Soient $\lambda_1, ...,\lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u (On rappelle qu'elles sont réelles positives ou nulles); montrer l'existence de $P \in R[X]$ tel que pour tout entier i entre 1 et p, $P(\lambda_i) = (\lambda_i)^{1/2}$.

b. On pose v = P(u) ;montrer que $v^2 = u$;

c. Montrer, en utilisant les sous-espaces propres de u, que v est le seul endomorphisme symétrique positif de carré égal à u .

d. Montrer que, si u' et u'' sont deux endomorphismes symétriques positifs de E tels que $(u')^2 = (u'')^2$, alors : u' = u'' .

4. Soient A et $B \in M_n(R)$; on les suppose symétriques positives; montrer que, si $A^2 = B^2$, alors A = B .